michael.enzenhofer@eduhi.at
April 2016

Tonhöhenberechnung eines Klangstabs

Eine Stab-Schwingung ist eine Schwingung die von einem Stab aus elastischem Material ausgeführt wird.[1]
Am wichtigsten sind dabei *Longitudinal-*, *Transversal-* sowie *Torsionsschwingungen*.

Die Frequenz der Stab-Schwingung hängt vom Material und von der Dimensionen sowie der Befestigungsart des Stabes ab.

Es wird dabei auch von Biege-Eigen-Frequenzen eines Rechteck-Stabes gesprochen:
Die Formel für die Berechnung der Eigenfrequenz lautet:[2]

$$f_n = \frac{s_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{I}{A}}\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

f_n	....	Resonanzfrequenzen f_1 bis f_n
s_n	....	Beiwerte, die je nach Randbedingungen charakteristische Größen annehmen.
l	....	Stablänge
E*	....	Elastizitätsmodul des Materials
ρ_0	....	Dichte des Materials
A	....	Querschnittsfläche des Stabes
I	....	Flächenträgheitsmoment des Stabes

*Der Betrag des Elastizitätsmoduls E ist umso größer, je mehr Widerstand ein Material seiner elastischen Verformung entgegensetzt.

[1]Vergleiche: Lexikon der Physik
http://www.spektrum.de/lexikon/physik/stabschwingungen/13730 26. April 2016.
[2]Formeln und wertvolle Hinweise sind einer Studie "Zum Stimmen von Klangstäben" von Gunter Ziegenhals vom *Institut für Musikinstrumentenbau an der TU Dresden* entnommen.
http://www.ifm-zwota.de/stabspie.pdf (26. April 2016).

Beispielsweise:[3]

Material	GPA [GigaPascal]
Aluminium	70
Glas	40 ... 90
Holz	10 ... 15
Marmor	72
Hartgumme	5

Die sogenannten *Beiwerte* s_n sind Tabellen zu entnehmen.

Resonanz	s_n	f_n/f_1	f_n/f_1 [cent]
f_1	4,73	1	0
f_2	7,853	2,76	1758
f_3	10,996	5,41	2923
f_4	14,137	8,94	3792
f_5	17,279	13,37	4498

Die Dichte ρ (Rho) ergibt sich aus:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

m .... Masse
V .... Volumen

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Elastizitätsmodul 26. April 2016.

Beispielsweise:

Material	ρ in kg/m^3
Aluminium	2710
Eisen	7860
Glas	$2400 \ldots 2700$
Buche	720
Eiche	860
Fichte	430
Zement	$800 \ldots 1900$

Für einen rechteckigen Stab der Breite $\boldsymbol{b}$ und der Dicke $\boldsymbol{d}$ erhält man für das Flächenträgheitsmoment bezüglich der Längsachse

$$I = \frac{bd^3}{12}$$

Durch Einsetzen in unsere Formel also:

$$f_n = \frac{s_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{\frac{bd^3}{12}}{bd}}\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

Und folglich durch Kürzen und Herausheben:

$$f_n = \frac{s_n^2 d}{4\sqrt{3}\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

Für ein Glockenspiel kann nun angenommen werden, dass die verschiedenen Klangstäbe aus gleichem Material und auch aus gleich-dickem Material mit gleichem Querschnitt gebaut werden. Weiters wollen wir uns auf die Frequenz des Grundtones konzentrieren. Das heißt, dass ein Großteil der Formel durch eine Konstante k ersetzt werden darf. Also:

$$\frac{s_1^2 d}{4\sqrt{3}\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho_0}} = k_1$$

und demnach sind nur noch die unterschiedlichen Längen maßgeblich:

$$f_1 = \frac{k_1}{l^2}$$

Da die Frequenz eines um eine Oktave höheren Tones die doppelte ist, muss bei der Frequenz eines um einen Halbton höheren Tones ein Faktor gesucht werden, der zwölf mal mit sich selbst multipliziert zwei ergibt:

$$\text{Faktor}^{12} = 2$$
$$\text{Faktor} = \sqrt[12]{2} = 1,059463094359295$$

$$f_1(\text{Halbton höher}) = f_1(\text{Ausgangston}) \sqrt[12]{2}$$

Vorangegangene Überlegungen führen uns zur Berechnung der Längenverhältnisse von Klangstäben für musikalische Anwendungen – zum Beispiel eines Glockenspiels. Die Länge eines Stabes muss dabei schon fest stehen, um weitere Stäbe in musikalisch sinnvollen Intervallen (zum Beispiel in Halbtonschritten) zu erhalten.

Berechnung von musikalisch üblichen Halbtonschritten bei Klangstäben:

$$\frac{f_{1\,(\text{Halbton höher})}}{f_{1\,(\text{Ausgangston})}} = \frac{\frac{k_1}{l_{(\text{Halbton höher})}^2}}{\frac{k_1}{l_{(\text{Ausgangston})}^2}}$$

$$\frac{\cancel{f_1(_{\text{Ausgangston})}}\ \sqrt[12]{2}}{\cancel{f_{1\,(\text{Ausgangston})}}} = \frac{\cancel{k_1}\, l_{(\text{Ausgangston})}^2}{\cancel{k_1}\, l_{(\text{Halbton höher})}^2}$$

$$\sqrt[12]{2} = \frac{l_{(\text{Ausgangston})}^2}{l_{(\text{Halbton höher})}^2}$$

$$l_{(\text{Halbton höher})}^2 = \frac{l_{(\text{Ausgangston})}^2}{\sqrt[12]{2}}$$

$$\sqrt{l_{(\text{Halbton höher})}^2} = \sqrt{\frac{l_{(\text{Ausgangston})}^2}{\sqrt[12]{2}}}$$

$$l_{(\text{Halbton höher})} = \frac{l_{(\text{Ausgangston})}}{\sqrt{\sqrt[12]{2}}}$$

$$\boxed{l_{(\text{Halbton höher})} = \frac{l_{(\text{Ausgangston})}}{\sqrt[24]{2}}}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass auch gilt:

$$\boxed{l_{(\text{Halbton tiefer})} = l_{(\text{Ausgangston})}\ \sqrt[24]{2}}$$